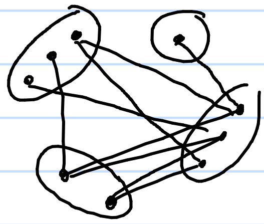
• Dizemos que um grafo G é <u>k-partido</u> se existe uma partição $\{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ tal que V_i é um conj. independente para todo $i = 1, \dots, k$.

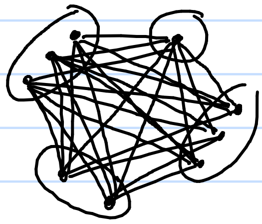
Partes



Ex. de grafo 4-partido

Seja G um grafo k-partido que admite uma partição $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de $V(G)$. Dizemos que G é <u>k-partido completo</u> se $E(V_i, V_j)$ possui todas as arestas possíveis qndo $i \neq j$

Ex



grafo 4-partido completo

O grafo de <u>Turán $T_k(n)$</u> é o grafo k-partido completo com o maior número de arestas possível. Definimos $t_k(n) = e(T_k(n))$.

Se n é múltiplo de k, todas as partes do grafo de Turán tem exatamente n/k vértices. Portanto

$$t_k(n) = \left(n - \frac{n}{k}\right)\left(\frac{n}{\cancel{k}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{k}}{2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

② cada vertice tem essa # de vizinhos

① há $\left(\frac{n}{k}\right)$ vértices em 1 parte

③ k partes e aresta contada 2x

No caso geral, cada parte tem tamanho $\lfloor n/k \rfloor$ ou $\lceil n/k \rceil$

Teorema (Turán, 1941) Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_{k+1}-livre com n vértices. Então

i) $e(G) \leq t_k(n)$; e

ii) $e(G) = t_k(n)$ se e somente se $G = T_k(n)$. $\Leftarrow$ trivial

Demonstração

A prove segue por indução em n

Base $n \leq k$

Neste caso $T_k(n) = K_n$ e $t_k(n) = \binom{n}{2}$. Assim (i) vale, já que $e(G) \leq e(K_n) = T_k(n)$, e (ii) vale, já que se $e(G) = t_k(n) = \binom{n}{2}$, então $G = K_n = T_k(n)$.

Passo $n \geq k+1$

- Adicione arestas a G de forma a gerar um grafo $G \subseteq G'$ que seja K_{k+1}-livre maximal.
- Claramente $e(G) \leq e(G')$
- Note que existe uma clique $S \subseteq V(G')$ em G' tal que $|S| = k$
- Seja $G'' = G' - S$ e note que G'' é K_{k+1}-livre.
- Por Hipótese de indução

  (a) $e(G'') \leq t_k(n-k)$; e

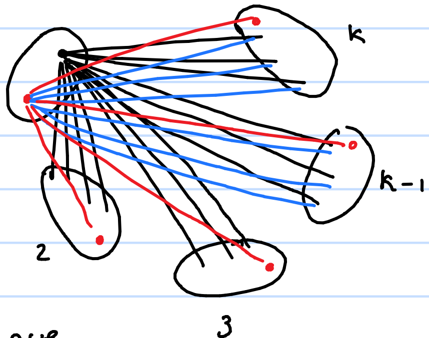
  (b) $e(G'') = t_k(n-k)$ sse $G'' = T_k(n-k)$
- Note que cada vértice u de $V(G'')$ é adjacente a no máximo $k-1$ vértices em S, caso contrário $G[S \cup \{u\}]$ seria uma cópia do K_{k+1}.
- Assim,

$$e(G) \leq e(G') = e(G'') + e(V(G''), S) + e(G'[S]) \qquad (A)$$
$$\leq t_k(n-k) + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2}$$

- Nós afirmamos que

$$t_k(n) = t_k(n-k) + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \qquad (B)$$

- Note que podemos criar o $T_k(n)$ a partir do $T_k(n-k)$ adicionando exatamente um vértice em cada uma das k partes de $T_k(n-k)$ conectado a todos os vértices das outras partes.
- Vamos dizer que os vértices e arestas do $T_k(n-k)$ estão pintados de preto, os vértices adicionados estão pintados de vermelho, e as arestas adicionadas estão pintadas de vermelho e azul: vermelho se liga dois vértices vermelhos e azul, caso contrário.



- Note que há $t_k(n-k)$ arestas pretas. Note tbm que cada vértice preto recebeu $k-1$ arestas azuis, logo foram adicionadas $(k-1)(n-k)$ arestas azuis no grafo. Por fim, note que os vértices vermelhos formam uma clique, logo há $\binom{|S|}{2} = \binom{K}{2}$ arestas vermelhas.

Como $t_K(n)$ é a soma do # de arestas pretas, azuis e vermelhas, temos que

$$t_K(n) = t_K(n-K) + (n-K)(n-1) + \binom{K}{2},$$

e a afirmação segue.

Por (A) e (B), temos que

$$\begin{aligned} e(G) \leq e(G') &= e(G'') + e(V(G''), S) + e(G'[S]) \qquad \text{(C)} \\ &\leq t_K(n-K) + (n-K)(K-1) + \binom{K}{2} \\ &= t_K(n) \end{aligned}$$

- Isso prova (i).
- Se $e(G) = t_K(n)$, então a desigualdades de (C) devem ser justas.
- Isso implica que G é K_{K+1}-livre maximal ($G = G'$), que $e(G'') = t_K(n-K)$
- Além disso, implica que $e(V(G''), S) = (n-K)(K-1)$, o que implica em $e(u, S) = K-1$ para cada $u \in V(G'')$.
- Assim, para cada $u \in V(G'')$, existe um único vértice em S, digamos S_u, tal que u e S_u ñ são adjacentes.
- Seja $S = \{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ e seja

$$B_i = \{u_i\} \cup \{v \in V(G'') : S_v = u_i\} \qquad \text{para } i = 1, \dots, K$$

- Se B_i ñ é um conj. independente em G, então existem dois vértices $x, y \in B_i$ tal que $xy \in E(G)$. Note que $x, y \in V(G'')$. Note também que x, y são adjacentes a todos os vértices de $S \setminus \{u_i\}$ em G. Assim, $G[(S \setminus \{u_i\}) \cup \{x, y\}] = K_{K+1}$, um absurdo.
- Então B_i é conj. independente em G, para todo $i = 1, \dots, K$, e $\{B_1, B_2, \dots, B_K\}$ é uma K-partição de G.
- Seja $\{P_1, P_2, \dots, P_K\}$ uma K-partição completa de G''.
- Note que cada B_i acomoda no máximo um P_j, e como temos apenas K B_i's temos que cada B_i acomoda exatamente um P_j
- Portanto G é K-partido Balanceado completo, ou seja, $G \simeq T_K(n)$. $\square$

O <u>grau</u> de um vértice u de um grafo G, denotado por $d_G(u)$, é a quantidade de arestas que contém o vértice u.

O <u>grau máximo</u> de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é

$$\Delta(G) = \max\{d(u) : u \in V(G)\}$$

O <u>grau mínimo</u> de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é

$$\delta(G) = \min\{d(u) : u \in V(G)\}$$

A próxima prova que veremos é um fortalecimento do teorema de Turán.

Teorema (Erdős) Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja G um grafo K_{k+1}-livre com n vértices. Então existe um grafo k-partido H com $V(H) = V(G)$ e
$$d_H(v) \geq d_G(v)$$
para todo $v \in V(G)$.

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \leq \sum_{v \in V(H)} d_H(v) = 2e(H)$$

$$e(G) \leq e(H) \leq t_k(n)$$

↳ grafo k-partido completo com o maior # de arestas possíveis

- É possível deduzir da prova a seguir que $T_k(n)$ é o único grafo K_{k+1}-extremal.

- A prova a seguir usa um procedimento conhecido como <u>simetrização de Zykov</u>: A ideia é que se $uv \in E(G)$ e $d(v) \leq d(u)$, então apagar as arestas incidentes a v e colocar arestas ligando v a $N(u)$ não cria um K_{k+1} (se G era K_{k+1}-livre) e ñ diminui o grau de nenhum vértice.

Demonstração

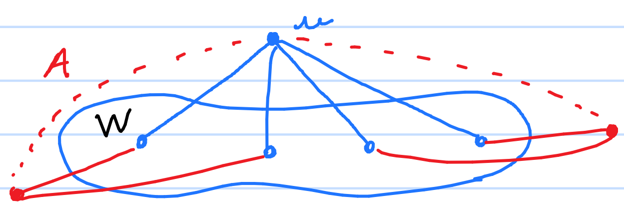
- A prova segue por indução em k

<u>Base $k=1$</u>

- Se $k=1$, então o resultado segue trivialmente, já que um grafo livre de K_2 ñ possui arestas

<u>Passo $k \geq 2$</u>

- Agora suponha que $k \geq 2$.
- Seja G um grafo livre de K_{k+1} e seja $u \in V(G)$ um vértice de grau máximo em G. Seja $W = N(u)$
- Seja $G' = G[W]$ e seja $A = V(G) \setminus W$
- Note que G' é um grafo livre de K_k e que
$$d_G(v) \leq d_{G'}(v) + |A| \quad \forall v \in V(G')$$



- Pela Hipótese de indução, existe um grafo $(K-1)$-partido H' tal que $V(H') = V(G')$ e

$$d_{H'}(v) \geq d_{G'}(v) \quad \forall\, v \in V(G')$$

- Seja G^* o grafo tal que

$$V(G^*) = V(G)$$
$$E(G^*) = E(H') \cup \{xy : x \in W \text{ e } y \in A\}$$

- Note que G^* é K-partido e que $V(G^*) = V(G)$.
- Agora vamos mostrar que $d_{G^*}(v) \geq d_G(v)$ para todo $v \in V(G)$
- Note que $V(G^*) = W \cup A$
- Se $v \in W$, então

$$d_{G^*}(v) = d_{H'}(v) + |A| \geq d_{G'}(v) + |A| \geq d_G(v)$$

- Se $v \in A$, então

$$d_G(v) \leq \Delta(G) = d_G(u) = |W| = d_{G^*}(v).$$

$\square$